

Bab 10

Spin Elektron dan Teorema Spin-Statistik

Diadaptasi dari Teks Sumber

3 November 2025

Daftar Isi

1	Spin Elektron	2
2	Spin dan Atom Hidrogen	4
3	Teorema Spin-Statistik	5
4	Atom Helium	6
5	Asas Larangan Pauli	7
6	Determinan Slater	8
7	Perlakuan Perturbasi pada Keadaan Dasar Litium	9
8	Perlakuan Variasi pada Keadaan Dasar Litium	10
9	Momen Magnetik Spin	10
9.1	Spektroskopi NMR	10
10	Operator Tangga untuk Spin Elektron	11
11	Ringkasan	12
12	Soal-Soal	13

1 Spin Elektron

Semua kimiawan akrab dengan warna kuning yang diberikan pada nyala api oleh atom natrium. Garis kuning terkuat (garis D) dalam spektrum natrium sebenarnya adalah dua garis yang berjarak sangat dekat. Garis D natrium muncul dari transisi dari konfigurasi tereksitasi $1s^2 2s^2 2p^6 3p$ ke keadaan dasar. Sifat doublet dari garis ini dan garis-garis lain dalam spektrum Na menunjukkan adanya penggandaan jumlah keadaan yang diharapkan tersedia bagi elektron valensi.

Untuk menjelaskan struktur halus (fine structure) dari spektrum atom ini, Uhlenbeck dan Goudsmit mengusulkan pada tahun 1925 bahwa elektron memiliki momentum sudut intrinsik (bawaan) selain momentum sudut orbital akibat gerakannya mengelilingi inti. Jika kita membayangkan elektron sebagai bola bermuatan yang berputar mengelilingi salah satu diameternya, kita dapat melihat bagaimana momentum sudut intrinsik semacam itu dapat muncul. Oleh karena itu, kita memiliki istilah momentum sudut spin atau, lebih sederhana, spin.

Namun, "spin" elektron bukanlah efek klasik, dan gambaran elektron yang berputar pada sumbunya tidak memiliki realitas fisik. Momentum sudut intrinsik itu nyata, tetapi tidak ada model yang mudah divisualisasikan yang dapat menjelaskan asalnya dengan tepat. Kita tidak dapat berharap untuk memahami partikel mikroskopis berdasarkan model yang diambil dari pengalaman kita di dunia makroskopis. Partikel elementer lain selain elektron juga memiliki momentum sudut spin.

Pada tahun 1928, Dirac mengembangkan mekanika kuantum relativistik untuk elektron, dan dalam perlakuannya, spin elektron muncul secara alami. Dalam mekanika kuantum non-relativistik yang kita batasi, spin elektron harus diperkenalkan sebagai hipotesis tambahan.

Kita telah belajar bahwa setiap sifat fisik memiliki operator linear Hermitian yang sesuai dalam mekanika kuantum. Untuk sifat-sifat seperti momentum sudut orbital, kita dapat membangun operator mekanika kuantum dari ekspresi klasik dengan mengganti p_x, p_y, p_z dengan operator yang sesuai. Momentum sudut spin yang melekat pada partikel mikroskopis tidak memiliki analogi dalam mekanika klasik, jadi kita tidak dapat menggunakan metode ini untuk membangun operator untuk spin. Untuk tujuan kita, kita hanya akan menggunakan simbol untuk operator spin, tanpa memberikan bentuk eksplisit untuk mereka.

Analog dengan operator momentum sudut orbital $\hat{L}^2, \hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$, kita memiliki operator momentum sudut spin $\hat{S}^2, \hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$, yang dipostulasikan sebagai linear dan Hermitian. $\hat{S}^2$ adalah operator untuk kuadrat dari besarnya total momentum sudut spin sebuah partikel. $\hat{S}_z$ adalah operator untuk komponen z dari momentum sudut spin partikel. Kita memiliki

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 \quad (1)$$

Kita mempostulasikan bahwa operator momentum sudut spin mematuhi hubungan komutasi yang sama dengan operator momentum sudut orbital. Analog dengan $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z$, dst., kita memiliki

$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z, \quad [\hat{S}_y, \hat{S}_z] = i\hbar\hat{S}_x, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_x] = i\hbar\hat{S}_y \quad (2)$$

Dari (10.1) dan (10.2), dengan aljabar operator yang sama yang digunakan untuk mendapatkan (5.49) dan (5.50) (dalam bab sebelumnya), diperoleh bahwa

$$[\hat{S}^2, \hat{S}_x] = [\hat{S}^2, \hat{S}_y] = [\hat{S}^2, \hat{S}_z] = 0 \quad (3)$$

Karena Persamaan (10.1) dan (10.2) memiliki bentuk yang sama dengan Persamaan (5.107) dan (5.108), maka dari pembahasan di Bagian 5.4 (yang hanya bergantung pada hubungan komutasi dan bukan pada bentuk spesifik operator), nilai eigen dari $\hat{S}^2$ adalah

$$s(s+1)\hbar^2, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (4)$$

dan nilai eigen dari $\hat{S}_z$ adalah

$$m_s\hbar, \quad m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s \quad (5)$$

Bilangan kuantum s disebut spin partikel. Meskipun tidak ada dalam Bagian 5.4 yang membatasi elektron pada satu nilai s , eksperimen menunjukkan bahwa semua elektron memang memiliki satu nilai s , yaitu $s = \frac{1}{2}$. Proton dan neutron juga memiliki $s = \frac{1}{2}$. Pion memiliki $s = 0$. Foton memiliki $s = 1$. Namun, Persamaan (10.5) tidak berlaku untuk foton. Foton bergerak dengan kecepatan c dalam vakum. Karena sifat relativistiknya, ternyata foton hanya dapat memiliki $m_s = +1$ atau $m_s = -1$, tetapi tidak $m_s = 0$. Dua nilai m_s ini sesuai dengan cahaya terpolarisasi sirkular kiri dan kanan.

Dengan $s = \frac{1}{2}$, besarnya momentum sudut spin total elektron diberikan oleh akar kuadrat dari (10.4) sebagai

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) \hbar^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \hbar \quad (6)$$

Untuk $s = \frac{1}{2}$, Persamaan (10.5) memberikan nilai eigen yang mungkin dari $\hat{S}_z$ elektron sebagai $+\frac{1}{2}\hbar$ dan $-\frac{1}{2}\hbar$. Fungsi eigen spin elektron yang sesuai dengan nilai eigen $\hat{S}_z$ ini dilambangkan dengan α dan β :

$$\hat{S}_z \alpha = +\frac{1}{2} \hbar \alpha \quad (7)$$

$$\hat{S}_z \beta = -\frac{1}{2} \hbar \beta \quad (8)$$

Karena $\hat{S}_z$ komut dengan $\hat{S}^2$, kita dapat mengambil fungsi eigen dari $\hat{S}_z$ untuk menjadi fungsi eigen dari $\hat{S}^2$ juga, dengan nilai eigen yang diberikan oleh (10.4) dengan $s = \frac{1}{2}$:

$$\hat{S}^2 \alpha = \frac{3}{4} \hbar^2 \alpha, \quad \hat{S}^2 \beta = \frac{3}{4} \hbar^2 \beta \quad (9)$$

$\hat{S}_z$ tidak komut dengan $\hat{S}_x$ atau $\hat{S}_y$, jadi α dan β bukan fungsi eigen dari operator-operator ini. Istilah "spin atas" (spin up) dan "spin bawah" (spin down) mengacu pada $m_s = +\frac{1}{2}$ dan $m_s = -\frac{1}{2}$, secara berturut-turut.

<blockquote> **Gambar 10.1:** Orientasi yang mungkin dari vektor spin elektron terhadap sumbu z. Dalam setiap kasus, S terletak pada permukaan kerucut yang sumbu-bunya adalah sumbu z. Vektor S memiliki panjang $\frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$. Komponen z-nya adalah $+\frac{1}{2}\hbar$ untuk spin atas (α) dan $-\frac{1}{2}\hbar$ untuk spin bawah (β). </blockquote>

Fungsi gelombang yang telah kita bahas sebelumnya adalah fungsi dari koordinat spasial partikel: $\psi = \psi(x, y, z)$. Kita mungkin bertanya: Apa variabel untuk fungsi eigen spin α dan β ? Kadang-kadang orang berbicara tentang "koordinat spin" ω , tanpa benar-benar menentukan apa koordinat ini. Paling sering, orang mengambil bilangan kuantum spin m_s sebagai variabel tempat fungsi eigen spin bergantung. Prosedur ini cukup tidak biasa dibandingkan dengan fungsi gelombang spasial; tetapi karena kita hanya memiliki

dua fungsi eigen dan nilai eigen spin elektronik yang mungkin, ini adalah pilihan yang nyaman. Kita memiliki

$$\alpha = \alpha(m_s), \quad \beta = \beta(m_s) \quad (10)$$

Seperti biasa, kita ingin fungsi eigen dinormalisasi. Tiga variabel dari fungsi gelombang spasial satu partikel berkisar secara kontinu dari $-\infty$ hingga $+\infty$, sehingga normalisasi berarti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1$$

Variabel m_s dari fungsi eigen spin elektronik hanya mengambil dua nilai diskrit $+\frac{1}{2}$ dan $-\frac{1}{2}$. Normalisasi fungsi eigen spin satu partikel oleh karena itu berarti

$$\sum_{m_s=-1/2}^{1/2} |\alpha(m_s)|^2 = 1 \quad (11)$$

$$\sum_{m_s=-1/2}^{1/2} |\beta(m_s)|^2 = 1 \quad (12)$$

Karena fungsi eigen α dan β sesuai dengan nilai eigen yang berbeda dari operator Hermitian $\hat{S}_z$, mereka ortogonal:

$$\sum_{m_s=-1/2}^{1/2} \alpha^*(m_s) \beta(m_s) = 0 \quad (13)$$

Ketika kita mempertimbangkan fungsi gelombang lengkap untuk elektron termasuk variabel ruang dan spin, kita akan menormalisasinya sesuai dengan

$$\sum_{m_s=-1/2}^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z, m_s)|^2 dx dy dz = 1 \quad (14)$$

Notasi $\int |\psi(x, y, z, m_s)|^2 d\tau$ akan menunjukkan penjumlahan atas variabel spin dan integrasi atas seluruh rentang variabel spasial, seperti pada (10.13). Simbol $\int dv$ akan menunjukkan integrasi atas seluruh rentang variabel spasial sistem.

2 Spin dan Atom Hidrogen

Fungsi gelombang yang menentukan keadaan elektron tidak hanya bergantung pada koordinat x , y , dan z tetapi juga pada keadaan spin elektron. Apa pengaruhnya terhadap fungsi gelombang dan tingkat energi atom hidrogen?

Dalam aproksimasi yang sangat baik, operator Hamiltonian untuk sistem elektron tidak melibatkan variabel spin tetapi merupakan fungsi hanya dari koordinat spasial dan turunan terhadap koordinat spasial. Akibatnya, kita dapat memisahkan fungsi gelombang keadaan stasioner dari satu elektron menjadi produk bagian ruang dan spin:

$$\psi(x, y, z)g(m_s)$$

di mana $g(m_s)$ adalah salah satu fungsi α atau β . Karena operator Hamiltonian tidak berpengaruh pada fungsi spin, kita memiliki

$$\hat{H}[\psi(x, y, z)g(m_s)] = g(m_s)\hat{H}\psi(x, y, z) = E[\psi(x, y, z)g(m_s)]$$

dan kita mendapatkan energi yang sama seperti yang ditemukan sebelumnya tanpa memperhitungkan spin. Satu-satunya perbedaan yang dibuat spin adalah menggandakan jumlah keadaan yang mungkin. Alih-alih keadaan $\psi(x, y, z)$, kita memiliki dua keadaan yang mungkin $\psi(x, y, z)\alpha$ dan $\psi(x, y, z)\beta$. Ketika kita memperhitungkan spin, degenerasi tingkat energi atom hidrogen adalah $2n^2$ daripada n^2 .

3 Teorema Spin-Statistik

Misalkan kita memiliki sistem beberapa partikel identik. Dalam mekanika klasik, identitas partikel tidak menimbulkan konsekuensi khusus. Namun, dalam mekanika kuantum, prinsip ketidakpastian memberi tahu kita bahwa kita tidak dapat mengikuti jalur pasti yang diambil oleh "partikel" mikroskopis. Jika partikel-partikel identik, maka satu-satunya cara kita dalam mekanika klasik untuk membedakan mereka, yaitu dengan menentukan jalur mereka, hilang dalam mekanika kuantum.

Oleh karena itu, fungsi gelombang dari sistem partikel identik yang berinteraksi tidak boleh membedakan di antara partikel-partikel tersebut. Fungsi gelombang dari sistem n partikel mikroskopis identik bergantung pada variabel ruang dan spin partikel. Biarkan q_i mewakili keempat variabel (ruang dan spin) untuk partikel i . Jadi $\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Kita mendefinisikan operator pertukaran atau permutasi $\hat{P}_{12}$ sebagai operator yang menukar semua koordinat partikel 1 dan 2:

$$\hat{P}_{12}f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = f(q_2, q_1, q_3, \dots, q_n) \quad (15)$$

Menerapkan $\hat{P}_{12}$ dua kali tidak memiliki efek bersih:

$$\hat{P}_{12}\hat{P}_{12}f(q_1, q_2, \dots, q_n) = \hat{P}_{12}f(q_2, q_1, \dots, q_n) = f(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (16)$$

Oleh karena itu, $\hat{P}_{12}^2 = \hat{1}$. Dapat ditunjukkan bahwa nilai eigen dari $\hat{P}_{12}$ adalah $+1$ dan -1 .

Fungsi w_+ yang merupakan fungsi eigen dari $\hat{P}_{12}$ dengan nilai eigen $+1$, bersifat

$$w_+(q_2, q_1, \dots, q_n) = w_+(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (17)$$

Fungsi seperti itu dikatakan ****simetris**** terhadap pertukaran partikel 1 dan 2. Untuk nilai eigen -1 , kita memiliki w_- :

$$w_-(q_2, q_1, \dots, q_n) = -w_-(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (18)$$

Fungsi ini ****antisimetris**** terhadap pertukaran partikel 1 dan 2.

Untuk sistem n partikel identik, fungsi gelombang harus simetris atau antisimetris terhadap pertukaran dua partikel identik mana pun, i dan k . Fungsi gelombang dari n partikel identik harus ***selalu*** simetris terhadap setiap pertukaran yang mungkin atau ***selalu*** antisimetris terhadap setiap pertukaran yang mungkin.

Bukti eksperimental menunjukkan bahwa untuk elektron, hanya kasus antisimetris yang terjadi. Dengan demikian, kita memiliki postulat tambahan mekanika kuantum: > Fungsi gelombang dari sistem elektron harus antisimetris terhadap pertukaran dua elektron mana pun.

Partikel dengan spin setengah bulat ($s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$) memerlukan fungsi gelombang antisimetris, sementara partikel dengan spin bulat ($s = 0, 1, \dots$) memerlukan fungsi

gelombang simetris. Pada tahun 1940, fisikawan Wolfgang Pauli menggunakan teori medan kuantum relativistik untuk membuktikan hasil ini.

Partikel yang memerlukan fungsi gelombang antisimetris, seperti elektron, disebut **fermion** (diambil dari nama E. Fermi). Partikel yang memerlukan fungsi gelombang simetris, seperti pion, disebut **boson** (diambil dari nama S. N. Bose). Pernyataan ini disebut **teorema spin-statistik**.

Teorema spin-statistik memiliki konsekuensi penting bagi sistem fermion identik. Persyaratan antisimetri berarti bahwa

$$\psi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = -\psi(q_2, q_1, q_3, \dots, q_n) \quad (19)$$

Pertimbangkan nilai ψ ketika elektron 1 dan 2 memiliki koordinat yang sama, yaitu, ketika $q_1 = q_2$. Menempatkan $q_2 = q_1$ dalam (10.19), kita memiliki

$$\begin{aligned} \psi(q_1, q_1, q_3, \dots, q_n) &= -\psi(q_1, q_1, q_3, \dots, q_n) \\ 2\psi(q_1, q_1, q_3, \dots, q_n) &= 0 \\ \psi(q_1, q_1, q_3, \dots, q_n) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Dengan demikian, dua elektron dengan spin yang sama memiliki probabilitas nol untuk ditemukan pada titik yang sama dalam ruang tiga dimensi. Persyaratan antisimetri memaksa elektron dengan spin yang sama untuk saling menjauh.

4 Atom Helium

Kita sekarang meninjau kembali atom helium dari sudut pandang spin elektron dan persyaratan antisimetri. Fungsi gelombang orde nol untuk keadaan dasar adalah $1s(1)1s(2)$. Untuk memperhitungkan spin, kita harus mengalikan fungsi spasial ini dengan fungsi eigen spin.

Untuk dua elektron, ada empat kemungkinan fungsi spin. Namun, fungsi $\alpha(1)\beta(2)$ dan $\alpha(2)\beta(1)$ melanggar prinsip ketidakterbedaan. Kombinasi linear yang benar (yang merupakan fungsi eigen dari $\hat{P}_{12}$) adalah:

$$2^{-1/2}[\alpha(1)\beta(2) \pm \beta(1)\alpha(2)] \quad (21)$$

Empat fungsi eigen spin dua elektron yang ternormalisasi dengan sifat pertukaran yang benar adalah:

- **Simetris (Triplet):**

$$\alpha(1)\alpha(2) \quad (22)$$

$$\beta(1)\beta(2) \quad (23)$$

$$[\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)]/\sqrt{2} \quad (24)$$

- **Antisimetris (Singlet):**

$$[\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)]/\sqrt{2} \quad (25)$$

Fungsi gelombang elektronik keseluruhan (termasuk spin) harus antisimetris. Fungsi $1s(1)1s(2)$ (bagian spasial) adalah simetris terhadap pertukaran. Oleh karena itu, kita harus mengalikan fungsi ruang simetris ini dengan fungsi spin antisimetris. Hanya ada satu fungsi spin antisimetris, sehingga fungsi gelombang orde nol keadaan dasar untuk atom helium adalah:

$$\psi^{(0)} = 1s(1)1s(2) \cdot 2^{-1/2}[\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)] \quad (26)$$

Sekarang pertimbangkan keadaan tereksitasi. Kita menemukan keadaan tereksitasi terendah memiliki fungsi gelombang spasial orde nol $2^{-1/2}[1s(1)2s(2) - 2s(1)1s(2)]$. Karena fungsi spasial ini antisimetris, kita harus mengalikannya dengan fungsi spin simetris. Kita dapat menggunakan salah satu dari tiga fungsi spin simetris, sehingga alih-alih tingkat non-degenerasi yang ditemukan sebelumnya, kita memiliki tingkat terdegenerasi tiga kali lipat dengan tiga fungsi gelombang orde nol:

$$\psi_1^{(0)} = 2^{-1/2}[1s(1)2s(2) - 2s(1)1s(2)]\alpha(1)\alpha(2) \quad (27)$$

$$\psi_2^{(0)} = 2^{-1/2}[1s(1)2s(2) - 2s(1)1s(2)]\beta(1)\beta(2) \quad (28)$$

$$\psi_3^{(0)} = 2^{-1/2}[1s(1)2s(2) - 2s(1)1s(2)]2^{-1/2}[\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)] \quad (29)$$

Untuk keadaan tereksitasi berikutnya (dengan bagian spasial simetris), fungsi gelombang orde nol adalah:

$$\psi_4^{(0)} = 2^{-1/2}[1s(1)2s(2) + 2s(1)1s(2)]2^{-1/2}[\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)] \quad (30)$$

5 Asas Larangan Pauli

Untuk litium (Li), jika kita mengabaikan spin, fungsi gelombang orde nol untuk keadaan dasar adalah

$$\psi^{(0)} = 1s(1)1s(2)1s(3) \quad (31)$$

Perhitungan energi menggunakan ini memberikan $E^{(0)} + E^{(1)} = -214.3$ eV. Nilai eksperimental energi keadaan dasar Li adalah -203.5 eV. Hasil perhitungan kita lebih rendah dari energi sebenarnya, yang merupakan pelanggaran prinsip variasi.

Kesalahan kita adalah kegagalan untuk mempertimbangkan spin dan persyaratan antisimetri. Fungsi $1s(1)1s(2)1s(3)$ bersifat simetris. Agar $\psi^{(0)}$ antisimetris, kita harus mengalikan fungsi ruang simetris ini dengan fungsi spin antisimetris. Namun, ***tidak mungkin*** membangun fungsi spin yang sepenuhnya antisimetris untuk tiga elektron.

Kita dapat secara sistematis membangun fungsi antisimetris untuk tiga elektron (termasuk koordinat ruang dan spin) menggunakan determinan. Jika f, g, h adalah tiga fungsi (spin-orbital), kombinasi antisimetris yang ternormalisasi adalah determinan orde ketiga:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} f(1) & g(1) & h(1) \\ f(2) & g(2) & h(2) \\ f(3) & g(3) & h(3) \end{vmatrix} \quad (32)$$

Jika kita mencoba menggunakan ini hanya untuk fungsi spin (misalnya, $f = \alpha$, $g = \beta$, $h = \alpha$), determinan menjadi nol karena dua kolom identik.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \alpha(1) & \beta(1) & \alpha(1) \\ \alpha(2) & \beta(2) & \alpha(2) \\ \alpha(3) & \beta(3) & \alpha(3) \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

Kita sekarang menggunakan (10.37) untuk membangun fungsi gelombang orde nol keadaan dasar untuk litium. Fungsi f, g, h sekarang akan melibatkan variabel ruang dan spin. Kita memilih:

$$f(1) = 1s(1)\alpha(1) \quad (34)$$

Fungsi seperti ini disebut **spin-orbital** (produk dari orbital spasial dan fungsi spin).

Jika kita mengambil $g(1) = 1s(1)\alpha(1)$, ini akan membuat kolom pertama dan kedua identik, dan fungsi gelombang akan lenyap. Ini adalah kasus khusus dari **Asas Larangan Pauli**: > Tidak ada dua elektron yang dapat menempati spin-orbital yang sama.

Cara lain untuk menyatakan ini adalah bahwa tidak ada dua elektron dalam sebuah atom yang dapat memiliki nilai yang sama untuk semua bilangan kuantum mereka.

Oleh karena itu, kita ambil $g(1) = 1s(1)\beta(1)$, yang menempatkan dua elektron dengan spin berlawanan di orbital $1s$. Untuk spin-orbital h , kita tidak dapat menggunakan $1s(1)\alpha(1)$ atau $1s(1)\beta(1)$. Kita ambil $h(1) = 2s(1)\alpha(1)$, yang memberikan konfigurasi keadaan dasar Li yang dikenal $1s^2 2s$ dan fungsi gelombang orde nol:

$$\psi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1s(1)\alpha(1) & 1s(1)\beta(1) & 2s(1)\alpha(1) \\ 1s(2)\alpha(2) & 1s(2)\beta(2) & 2s(2)\alpha(2) \\ 1s(3)\alpha(3) & 1s(3)\beta(3) & 2s(3)\alpha(3) \end{vmatrix} \quad (35)$$

Keadaan dasar litium terdegenerasi ganda, karena kita bisa saja mengambil $h(1) = 2s(1)\beta(1)$.

6 Determinan Slater

Slater menunjukkan pada tahun 1929 bahwa determinan dalam bentuk (10.40) memenuhi persyaratan antisimetri untuk atom berelektron banyak. Determinan seperti (10.40) disebut **Determinan Slater**.

Untuk konfigurasi keadaan dasar helium $1s^2$, kita memiliki spin-orbital $1s\alpha$ dan $1s\beta$, menghasilkan determinan Slater:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1s(1)\alpha(1) & 1s(1)\beta(1) \\ 1s(2)\alpha(2) & 1s(2)\beta(2) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} 1s(1)1s(2)[\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)] \quad (36)$$

yang sesuai dengan (10.26).

Untuk keadaan yang sesuai dengan konfigurasi tereksitasi $1s2s$, kita memiliki empat determinan Slater yang mungkin:

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1s(1)\alpha(1) & 2s(1)\alpha(1) \\ 1s(2)\alpha(2) & 2s(2)\alpha(2) \end{vmatrix} \quad (37)$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1s(1)\alpha(1) & 2s(1)\beta(1) \\ 1s(2)\alpha(2) & 2s(2)\beta(2) \end{vmatrix} \quad (38)$$

$$D_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1s(1)\beta(1) & 2s(1)\alpha(1) \\ 1s(2)\beta(2) & 2s(2)\alpha(2) \end{vmatrix} \quad (39)$$

$$D_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1s(1)\beta(1) & 2s(1)\beta(1) \\ 1s(2)\beta(2) & 2s(2)\beta(2) \end{vmatrix} \quad (40)$$

Fungsi gelombang orde nol (10.27) hingga (10.30) terkait dengan determinan ini sebagai berikut:

$$(10.27) = D_1 \quad (41)$$

$$(10.28) = D_4 \quad (42)$$

$$(10.29) = 2^{-1/2}(D_2 + D_3) \quad (43)$$

$$(10.30) = 2^{-1/2}(D_2 - D_3) \quad (44)$$

(Untuk mendapatkan fungsi orde nol yang merupakan fungsi eigen dari operator spin dan momentum sudut orbital, kita terkadang harus mengambil kombinasi linear dari determinan Slater).

Sebuah notasi singkat sering digunakan. Garis di atas fungsi spasial menunjukkan fungsi spin β , dan fungsi spasial tanpa garis menyiratkan faktor spin α . Dengan notasi ini, (10.40) ditulis sebagai:

$$\phi^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1s(1) & \overline{1s}(1) & 2s(1) \\ 1s(2) & \overline{1s}(2) & 2s(2) \\ 1s(3) & \overline{1s}(3) & 2s(3) \end{vmatrix} \quad (45)$$

Notasi yang lebih singkat lagi hanya menentukan spin-orbital:

$$\psi^{(0)} = |1s\overline{1s}2s| \quad (46)$$

di mana garis vertikal menunjukkan pembentukan determinan dan perkalian dengan $1/\sqrt{n!}$, di mana n adalah jumlah elektron.

7 Perlakuan Perturbasi pada Keadaan Dasar Litium

Kita ambil $\hat{H}^0$ sebagai Hamiltonian hidrogenik untuk 3 elektron dan $\hat{H}'$ sebagai tolakan antar elektron. Fungsi gelombang orde nol yang benar adalah (10.40). $E^{(0)}$ adalah jumlah dari energi hidrogenik:

$$E^{(0)} = E_{1s}^{(0)} + E_{1s}^{(0)} + E_{2s}^{(0)} = -\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right) \left(\frac{Z^2 e'^2}{2a_0}\right) \quad (47)$$

Untuk $Z = 3$, $E^{(0)} = -275.5$ eV.

Evaluasi $E^{(1)} = \langle \psi^{(0)} | \hat{H}' | \psi^{(0)} \rangle$ menghasilkan:

$$E^{(1)} = 2 \iint 1s^2(1)2s^2(2) \frac{e'^2}{r_{12}} dv_1 dv_2 + \iint 1s^2(1)1s^2(2) \frac{e'^2}{r_{12}} dv_1 dv_2 - \iint 1s(1)2s(2)1s(2)2s(1) \frac{e'^2}{r_{12}} dv_1 dv_2 \quad (48)$$

Integral-integral ini adalah integral Coulomb (J) dan integral pertukaran (K):

$$E^{(1)} = 2J_{1s2s} + J_{1s1s} - K_{1s2s} \quad (49)$$

Menggunakan nilai-nilai yang dihitung (untuk $Z = 3$), $E^{(1)} = 83.5$ eV. Energi hingga orde pertama adalah $E^{(0)} + E^{(1)} = -192.0$ eV, yang masih jauh dari nilai sebenarnya -203.5 eV.

8 Perlakuan Variasi pada Keadaan Dasar Litium

Fungsi gelombang perturbasi (10.40) menggunakan muatan inti penuh ($Z = 3$) untuk orbital 1s dan 2s. Kita berharap elektron 2s, yang sebagian terlindung oleh dua elektron 1s, akan "melihat" muatan inti efektif yang jauh lebih kecil dari 3.

Ini menyarankan pengenalan dua parameter variasional b_1 (untuk 1s) dan b_2 (untuk 2s). Kita menggunakan fungsi orbital hidrogenik tetapi mengganti Z dengan b_1 dan b_2 .

$$f \equiv \frac{1}{\pi^{1/2}} \left(\frac{b_1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-b_1 r/a_0} \quad (50)$$

$$g \equiv \frac{1}{4(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{b_2}{a_0} \right)^{3/2} \left(2 - \frac{b_2 r}{a_0} \right) e^{-b_2 r/2a_0} \quad (51)$$

Fungsi coba variasi kita adalah determinan Slater yang dibangun dari $f\alpha$, $f\beta$, dan $g\alpha$:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} f(1)\alpha(1) & f(1)\beta(1) & g(1)\alpha(1) \\ f(2)\alpha(2) & f(2)\beta(2) & g(2)\alpha(2) \\ f(3)\alpha(3) & f(3)\beta(3) & g(3)\alpha(3) \end{vmatrix} \quad (52)$$

(Penggunaan $b_1 \neq b_2$ merusak ortogonalitas f dan g , sehingga normalisasi menjadi lebih rumit).

Nilai terbaik dari parameter variasional ditemukan dengan mengatur $\partial W/\partial b_1 = 0$ dan $\partial W/\partial b_2 = 0$. Hasilnya adalah $b_1 = 2.686$ dan $b_2 = 1.776$, dan energi variasional $W = -201.2$ eV. Hasil ini jauh lebih dekat ke nilai sebenarnya -203.5 eV daripada hasil perturbasi -192.0 eV. Nilai $b_2 = 1.776$ menunjukkan penyaringan yang substansial, tetapi tidak lengkap, terhadap elektron 2s oleh elektron 1s.

9 Momen Magnetik Spin

Momentum sudut orbital $\mathbf{L}$ elektron memiliki momen magnetik $-(e/2m_e)\mathbf{L}$ yang terkait dengannya. Wajar jika kita menganggap ada juga momen magnetik $\mathbf{m}_S$ yang terkait dengan momentum sudut spin $\mathbf{S}$.

Perlakuan relativistik Dirac untuk elektron memberikan hasil bahwa (dalam satuan SI):

$$\mathbf{m}_S = -g_e \frac{e}{2m_e} \mathbf{S} \quad (53)$$

di mana perlakuan Dirac memberikan $g_e = 2$ untuk faktor-g elektron g_e . Pekerjaan teoretis dan eksperimental selanjutnya menunjukkan bahwa g_e sedikit lebih besar dari 2; $g_e \approx 2.0023$. Faktor g_e telah diukur dengan akurasi yang luar biasa: $g_e = 2.002319304361$.

9.1 Spektroskopi NMR

Banyak inti atom memiliki momentum sudut spin $\mathbf{I}$ yang tidak nol. Mirip dengan spin elektron, besarnya $\mathbf{I}$ adalah $[I(I+1)]^{1/2}\hbar$, dan komponen z-nya adalah $M_I\hbar$, di mana $M_I = -I, -I+1, \dots, I$.

Jika $I \neq 0$, inti memiliki momen magnetik spin $\mathbf{m}_I$, yang diberikan oleh persamaan serupa dengan (10.55):

$$\mathbf{m}_I = g_N(e/2m_p)\mathbf{I} \equiv \gamma\mathbf{I} \quad (54)$$

Tabel 1: Nilai I , g_N , dan γ untuk beberapa inti.

Nukleus	^1H	^{12}C	^{13}C	^{15}N	^{19}F	^{31}P
I	1/2	0	1/2	1/2	1/2	1/2
g_N	5.58569	—	1.40482	-0.56638	5.25773	2.2632
$\gamma/(\text{MHz/T})$	267.522	—	67.283	-27.126	251.815	108.39

di mana m_p adalah massa proton, g_N adalah faktor-g nuklir, dan γ adalah rasio magnetogirik. Nilai-nilai untuk beberapa inti umum disajikan dalam tabel di bawah ini.

Dalam spektroskopi *Nuclear Magnetic Resonance* (NMR), seseorang mengamati transisi antar tingkat energi spin nuklir dalam medan magnet yang diterapkan. Energi interaksi antara $\mathbf{m}_I$ dan medan magnet eksternal $\mathbf{B}$ (diambil sepanjang sumbu z) adalah $E = -\mathbf{m}_I \cdot \mathbf{B} = -\gamma B I_z$. Operator Hamiltonian yang sesuai adalah $\hat{H} = -\gamma B \hat{I}_z$. Tingkat energi yang dihasilkan adalah:

$$E = -\gamma \hbar B M_I, \quad M_I = -I, -I + 1, \dots, I \quad (55)$$

Radiasi elektromagnetik menginduksi transisi antar tingkat energi ini. Aturan seleksi adalah $\Delta M_I = \pm 1$. Frekuensi transisi NMR ν adalah:

$$h\nu = |\Delta E| = |\gamma| \hbar B |\Delta M_I| = |\gamma| \hbar B \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{|\gamma|}{2\pi} B \quad (56)$$

Untuk inti dalam molekul, elektron di sekitarnya menghasilkan medan magnet kecil yang melawan medan eksternal. Medan yang "dirasakan" oleh inti i adalah $B_{eff} = (1 - \sigma_i)B$, di mana σ_i adalah konstanta penyaringan (shielding). Persamaan frekuensi menjadi:

$$\nu_i = \frac{|\gamma|}{2\pi} (1 - \sigma_i) B \quad (57)$$

Nilai σ_i bergantung pada lingkungan elektronik. Inilah sebabnya mengapa proton dalam CH_3 dan CH_2 dari etanol (CH_3CH_2OH) beresonansi pada frekuensi yang berbeda (disebut pergeseran kimia/chemical shift).

Selain itu, ada kopling spin-spin, di mana spin inti pada satu atom mempengaruhi medan yang dirasakan oleh inti di atom yang berdekatan. Ini memecah garis NMR. Misalnya, dua proton CH_2 (yang memiliki 4 kemungkinan keadaan spin total: $\uparrow\uparrow$, $\uparrow\downarrow$, $\downarrow\uparrow$, $\downarrow\downarrow$) memecah puncak CH_3 menjadi tiga garis (triplet) dengan intensitas relatif 1:2:1. Demikian pula, tiga proton CH_3 memecah puncak CH_2 menjadi $3 + 1 = 4$ garis (kuartet) dengan intensitas 1:3:3:1.

10 Operator Tangga untuk Spin Elektron

Operator momentum sudut umum juga berlaku untuk spin. Operator penaik ($\hat{S}_+$) dan penurun ($\hat{S}_-$) untuk spin adalah:

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y \quad (58)$$

$$\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y \quad (59)$$

Dari aljabar momentum sudut, kita memiliki:

$$\hat{S}_+\hat{S}_- = \hat{S}^2 - \hat{S}_z^2 + \hbar\hat{S}_z \quad (60)$$

$$\hat{S}_-\hat{S}_+ = \hat{S}^2 - \hat{S}_z^2 - \hbar\hat{S}_z \quad (61)$$

Fungsi spin α dan β adalah fungsi eigen dari $\hat{S}_z$ dengan nilai eigen $+\frac{1}{2}\hbar$ dan $-\frac{1}{2}\hbar$. $\hat{S}_+$ adalah operator penaik, sehingga $\hat{S}_+\beta$ harus sebanding dengan α :

$$\hat{S}_+\beta = c\alpha \quad (62)$$

Dengan menggunakan normalisasi dan sifat Hermitian dari $\hat{S}_x$ dan $\hat{S}_y$, kita dapat menunjukkan bahwa $|c|^2 = \hbar^2$. Dengan memilih fase $c = 0$, kita mendapatkan $c = \hbar$.

$$\hat{S}_+\beta = \hbar\alpha \quad (63)$$

Perhitungan serupa memberikan

$$\hat{S}_-\alpha = \hbar\beta \quad (64)$$

Karena α adalah keadaan m_s tertinggi dan β adalah yang terendah:

$$\hat{S}_+\alpha = 0 \quad (65)$$

$$\hat{S}_-\beta = 0 \quad (66)$$

Dari persamaan-persamaan ini, kita dapat menemukan aksi $\hat{S}_x$ dan $\hat{S}_y$ pada α dan β :

$$\hat{S}_x\alpha = \frac{1}{2}\hbar\beta, \quad \hat{S}_y\alpha = \frac{1}{2}i\hbar\beta \quad (67)$$

$$\hat{S}_x\beta = \frac{1}{2}\hbar\alpha, \quad \hat{S}_y\beta = -\frac{1}{2}i\hbar\alpha \quad (68)$$

11 Ringkasan

- Sebuah partikel elementer memiliki momentum sudut spin dengan besaran $[s(s+1)\hbar^2]^{1/2}$ dan komponen z $m_s\hbar$, di mana $m_s = -s, \dots, s$.
- Untuk elektron, $s = \frac{1}{2}$. Fungsi eigen spinnya adalah α ($m_s = +\frac{1}{2}$) dan β ($m_s = -\frac{1}{2}$).
- Fungsi gelombang lengkap (termasuk ruang dan spin) dari sistem partikel identik harus antisimetris terhadap pertukaran dua partikel jika mereka memiliki spin setengah bulat (fermion, seperti elektron). Fungsi gelombang harus simetris jika mereka memiliki spin bulat (boson). Ini adalah teorema spin-statistik.
- Untuk dua elektron, ada tiga fungsi spin simetris (keadaan triplet) dan satu fungsi spin antisimetris (keadaan singlet).
- Fungsi gelombang atom helium (dan sistem dua elektron lainnya) adalah produk dari bagian spasial simetris dan bagian spin antisimetris, ATAU bagian spasial antisimetris dan bagian spin simetris.
- Spin-orbital adalah produk dari fungsi gelombang spasial satu elektron dan fungsi spin satu elektron.

- Fungsi gelombang perkiraan untuk sistem elektron dapat ditulis sebagai determinan Slater dari spin-orbital. Ini secara otomatis memastikan sifat antisimetri.
- Akibat dari persyaratan antisimetri adalah Asas Larangan Pauli: tidak ada dua elektron yang dapat menempati spin-orbital yang sama (yaitu, memiliki semua bilangan kuantum yang sama).
- Elektron memiliki momen magnetik spin yang sebanding dengan momentum sudut spinnya. Transisi antara tingkat energi spin nuklir dalam medan magnet menimbulkan spektrum NMR.

12 Soal-Soal

1. Hitunglah besarnya momentum sudut spin dari sebuah proton ($s = \frac{1}{2}$).
2. Hitunglah sudut yang dibuat oleh vektor spin $\mathbf{S}$ dengan sumbu z untuk elektron dengan fungsi spin α .
3. Fungsi spin paling umum untuk elektron adalah $c_1\alpha + c_2\beta$.
 - (a) Lengkapi persamaan ini: $\hat{S}^2(c_1\alpha + c_2\beta) = ?$, $\hat{S}_z(c_1\alpha + c_2\beta) = ?$
 - (b) Persyaratan bahwa $c_1\alpha + c_2\beta$ ternormalisasi mengarah pada hubungan apa antara c_1 dan c_2 ?
4. (a) Jika S_z dari partikel dengan bilangan kuantum spin s diukur, apa hasil yang mungkin? (b) Jika S_x diukur, apa hasil yang mungkin?
5. Nyatakan apakah masing-masing berikut ini adalah boson atau fermion: (a) elektron; (b) proton; (c) neutron; (d) foton; (e) inti ^{12}C ; (f) inti ^{13}C ; (g) atom ^{12}C ; (h) atom ^{13}C .
6. (a) Tunjukkan bahwa $\hat{P}_{12}$ komut dengan Hamiltonian untuk atom litium. (b) Tunjukkan bahwa $\hat{P}_{12}$ dan $\hat{P}_{23}$ tidak komut satu sama lain.
7. Tunjukkan bahwa $\hat{P}_{12}$ adalah Hermitian.
8. Klasifikasikan masing-masing fungsi ini sebagai simetris, antisimetris, atau bukan keduanya: (a) $f(1)g(2)\alpha(1)\alpha(2)$; (b) $f(1)f(2)[\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)]$; (c) $[f(1)g(2) - g(1)f(2)][\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)]$.
9. Jika elektron memiliki spin nol, apa fungsi gelombang orde nol untuk keadaan dasar dan keadaan tereksitasi pertama litium?
10. Jelaskan mengapa fungsi $Ne^{-cr_1}e^{-cr_2}(r_1 - r_2)$ tidak boleh digunakan sebagai fungsi coba variasi untuk keadaan dasar atom helium.
11. (Soal mengenai operator antisimetrisasi $\hat{A}$)
12. Gunakan teorema tentang determinan untuk menunjukkan bahwa mengambil spin-orbital litium dalam determinan Slater sebagai $1s\alpha$, $1s\beta$, dan $1s(c_1\alpha + c_2\beta)$ menghasilkan fungsi gelombang yang sama dengan nol.

13. "Permanen" didefinisikan dengan ekspansi yang sama seperti determinan kecuali bahwa semua suku diberi tanda tambah. Dapatkah Anda memikirkan kegunaan permanen dalam mekanika kuantum?
14. Muon memiliki muatan dan spin yang sama dengan elektron, tetapi massa yang lebih berat. Apa konfigurasi keadaan dasar atom litium dengan dua elektron dan satu muon?
15. Turunkan Persamaan (10.50) untuk $E^{(1)}$ dari litium.
16. Jika kita salah menggunakan fungsi non-antisimetris $1s(1)1s(2)2s(3)$ sebagai fungsi gelombang orde nol Li, berapakah $E^{(1)}$ yang akan dihitung?
17. Hitunglah besarnya momen magnetik spin elektron.
18. (a) Gunakan Persamaan (6.131) untuk menemukan ekspresi tingkat energi momen magnetik spin elektron $\mathbf{m}_S$ dalam medan magnet $\mathbf{B}$ yang diterapkan. (b) Hitung frekuensi serapan ESR (Electron Spin Resonance) dari elektron dalam medan magnet 1.00 T.
19. Inti ^{35}Cl memiliki $I = 3/2$. (a) Tentukan besarnya momentum sudut spin inti ^{35}Cl . (b) Tentukan nilai-nilai yang mungkin jika komponen z dari momentum sudut spin diukur.
20. (a) Verifikasi nilai γ untuk ^1H yang diberikan dalam tabel. (b) Hitung frekuensi serapan NMR proton (^1H) dalam medan magnet 1.00 T.
21. (a) Untuk inti dengan $I = \frac{1}{2}$ dan $g_N > 0$, buat sketsa grafik tingkat energi spin nuklir versus medan $\mathbf{B}$ yang diterapkan. (b) Ulangi (a) untuk inti dengan $I = 1$ dan $g_N > 0$.
22. Untuk tiga proton CH_3 dalam etanol, gambarkan diagram yang mirip dengan (10.62) yang menunjukkan orientasi spin nuklir yang mungkin. Simpulkan jumlah garis pemecahan transisi NMR proton CH_2 yang berdekatan, dan berikan intensitas relatif garis-garis tersebut.
23. Spektrum NMR proton etanol berisi puncak triplet (intensitas 1:2:1) untuk proton CH_3 , kuartet (1:3:3:1) untuk proton CH_2 , dan singlet untuk proton OH. Berikan deskripsi serupa tentang spektrum NMR proton untuk: (a) $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{C}(\text{O})\text{H}$; (b) $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OCH}_2\text{CH}_3$; (c) benzena.
24. Verifikasi persamaan operator spin (10.70) dan (10.73).
25. Tunjukkan bahwa α dan β masing-masing adalah fungsi eigen dari $\hat{S}_x^2$ (tetapi tidak dari $\hat{S}_x$).
26. (a) Jika komponen spin S_x dari elektron diukur, nilai apa yang mungkin dihasilkan? (b) Gunakan (10.72) dan (10.73) untuk membangun dua fungsi eigen ternormalisasi dari $\hat{S}_x$ dengan nilai eigen $+\frac{1}{2}\hbar$ dan $-\frac{1}{2}\hbar$. (c) Misalkan pengukuran S_z memberikan $+\frac{1}{2}\hbar$. Jika pengukuran S_x kemudian dilakukan, berikan probabilitas untuk setiap hasil yang mungkin.
27. (Soal tentang operator tangga momentum sudut umum $\hat{M}_+$ dan $\hat{M}_-$)

28. (Soal tentang representasi matriks operator spin). Tunjukkan bahwa matriks yang sesuai dengan $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$, dan $\hat{S}^2$ adalah:

$$S_x = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Catatan: Ada sedikit perbedaan pada S^2 dari teks sumber (787) yang tampaknya salah ketik, S^2 harus $\frac{3}{4}\hbar^2 \cdot I$).

29. Benar atau Salah?

- (a) Nilai yang diizinkan dari bilangan kuantum s elektron adalah $-\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2}$.
- (b) Besarnya komponen z S_z dari momentum sudut spin partikel dengan spin tidak nol harus selalu kurang dari besarnya $|\mathbf{S}|$ dari momentum sudut spin.
- (c) Untuk setiap sistem dua elektron, faktor spin dalam fungsi gelombang harus antisimetris.
- (d) Untuk setiap sistem beberapa fermion, pertukaran label dua fermion dalam fungsi gelombang harus mengalikan fungsi gelombang dengan -1.
- (e) Atom ${}^9\text{Br}$ adalah boson.
- (f) Atom ${}^4\text{He}$ adalah fermion.
- (g) Momen magnetik inti jauh lebih kecil daripada momen magnetik elektron.

Daftar Pustaka

Pustaka

- [1] Dirac, P. A. M. (1928). The Quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 117(778), 610–624. (Artikel fundamental yang memperkenalkan persamaan Dirac, yang secara alami memprediksi spin elektron).
- [2] Pauli, W. (1940). The Connection Between Spin and Statistics. *Physical Review*, 58(8), 716–722. (Artikel klasik yang membuktikan hubungan antara spin partikel dan statistik (fermion/boson) yang dipatuhinya).
- [3] Griffiths, D. J., Schroeter, D. F. (2018). *Introduction to Quantum Mechanics* (3rd ed.). Cambridge University Press. (Buku teks standar modern yang sangat baik untuk mekanika kuantum, termasuk pembahasan mendalam tentang spin).
- [4] Levine, I. N. (2013). *Quantum Chemistry* (7th ed.). Pearson. (Buku teks kimia kuantum komprehensif yang mencakup spin, determinan Slater, dan metode variasional secara rinci).
- [5] Szabo, A., Ostlund, N. S. (1996). *Modern Quantum Chemistry: Introduction to Advanced Electronic Structure Theory*. Dover Publications. (Teks klasik untuk kimia kuantum komputasi, memberikan perlakuan rinci tentang determinan Slater dan aturan Slater-Condon).